Содержание

Задание 1. Построить математическую модель взаимодействия материальных тел путем составления условий равновесия для ломанного стержня в виде уравнений проекций сил на координатные оси X и Y и уравнений моментов сил относительно точки, лежащей на расстоянии C от точки приложения силы P_1. 3

Задание 2. Решить методом деления пополам (метод бисекций) уравнение F(x) = 0. В решении отыскать наименьший положительный или отрицательный корень. 8

Задание 3. В трубу AB под углом α к горизонтальной оси, заполненную жидкой средой, влетает груз Д, который имеет начальную массу m и начальную скорость V_0. На груз действуют следующие силы: сила тяжести G, сила вязкого сопротивления среды R, пропорциональная скорости груза, и сонаправленной с направлением движения сила Q. 10

Задание 4. Построить алгоритм вычисления интеграла методом трапеций с заданной точностью. Найти его значения в Excel и MathCAD. Сравнить результаты. 14

Задание 5. Обработка опытных данных методами интерполирования и аппроксимации (Вариант 1 + 7 = 8). 17

Здание 6. Найти значение вязкости масла для заданной температуры, используя инструменты интерполирования и аппроксимации в MathCAD. Сравнить результаты и сделать выводы. (Вариант 7) 20

Решение. Для приведенной схемы, построим математическую модель в виде системы линейных алгебраических уравнений.

Решение этой системы в MathCAD будет выглядеть следующим образом:

$Xa := 1 \quad Ya := 1 \quad Rb := 1$

$a := 3$

$P1 := 2 \quad P2 := 3 \quad M1 := 4 \quad M2 := 1 \quad q1 := 2 \quad q2 := 3$

Решение Given-Find

Given

$Ya + Rb - q1 \cdot a - q2 \cdot a - P2 = 0$

$Xa - P1 = 0$

$$M1 + q1 \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} + Rb \cdot a - P2 \cdot a - M2 - Xa \cdot 3 \cdot a - Ya \cdot a = 0$$

$$\begin{pmatrix} Xa \\ Ya \\ Rb \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(Xa, Ya, Rb) \qquad \begin{pmatrix} Xa \\ Ya \\ Rb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.25 \\ 13.75 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$P1 \cdot 3 \cdot a + q1 \cdot a \cdot \frac{a}{2} + q2 \cdot a \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) + P2 \cdot 2 \cdot a + M2 - M1 - Rb \cdot 2 \cdot a = 0$$

Решение матричным способом

$Ya + Rb - q1 \cdot a - q2 \cdot a - P2 \rightarrow 0$

$Xa - P1 \rightarrow 0$

$$M1 + q1 \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} + Rb \cdot a - P2 \cdot a - M2 - Xa \cdot 3 \cdot a - Ya \cdot a$$

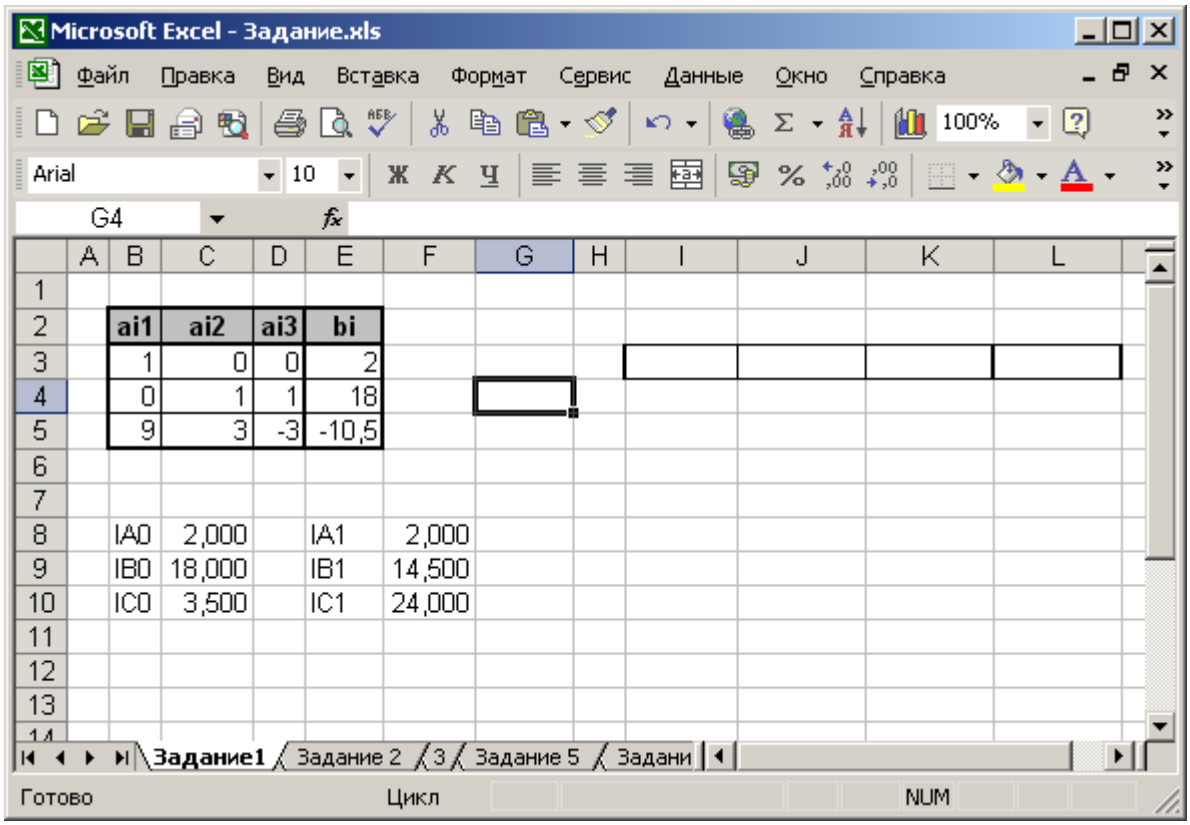
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3a & a & -a \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} q1 \cdot a + q2 \cdot a + P2 \\ P1 \\ M1 + \frac{1}{2} \cdot q1 \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot q2 \cdot a^2 - P2 \cdot a - M2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.25 \\ 13.75 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ -10.5 \end{pmatrix}$$

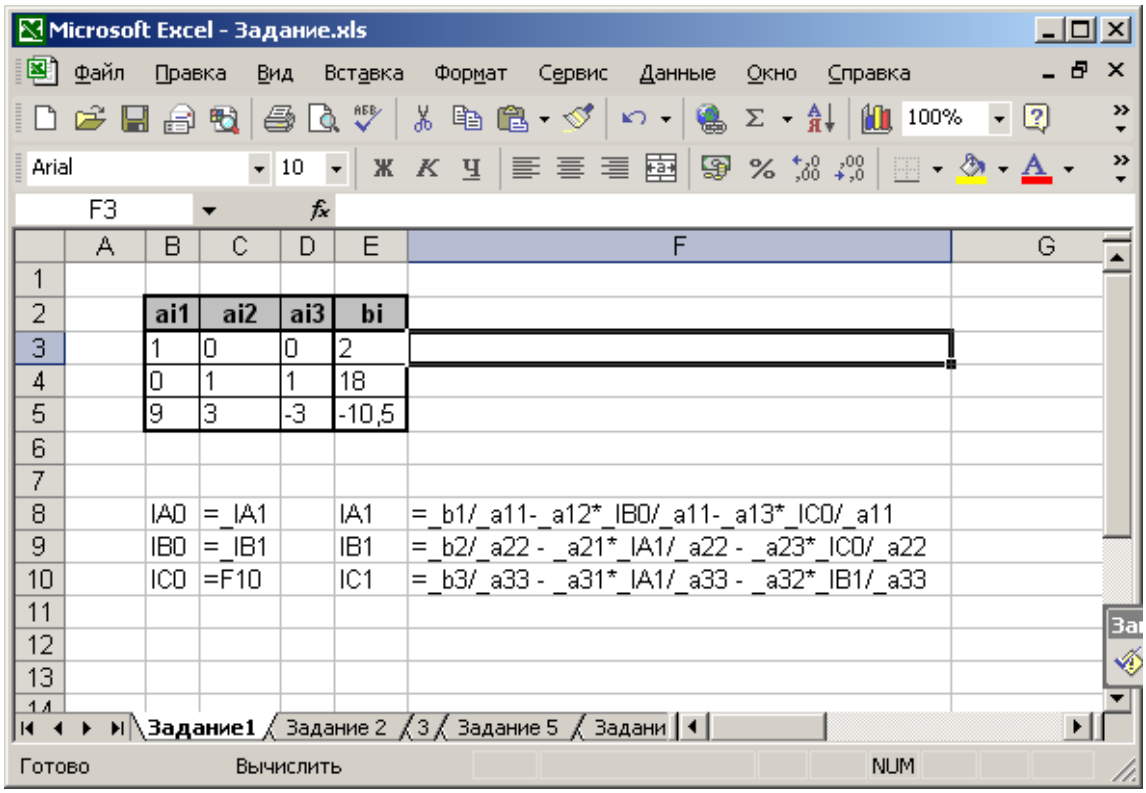
Для решения задачи в Excel необходимо составить матрицу коэффициентов и вектор-столбец свободных членов системы уравнений, описывающих задачу.

$$\begin{cases} Y_a + R_b - q_1 a - q_2 a - P_2 = 0 \\ X_a - P_1 = 0 \\ M_1 + q_1 a^2/2 - q_2 a^2/2 + R_b a - P_2 a - M_2 - 3aX_a + Y_a a = 0 \end{cases}$$

Результаты вычислений по этим формулам



Для проведения вычислений необходимо включить итерации, указать требуемую точность и нажать клавишу F9 (пересчет листа). После этого лист будет выглядеть следующим образом:



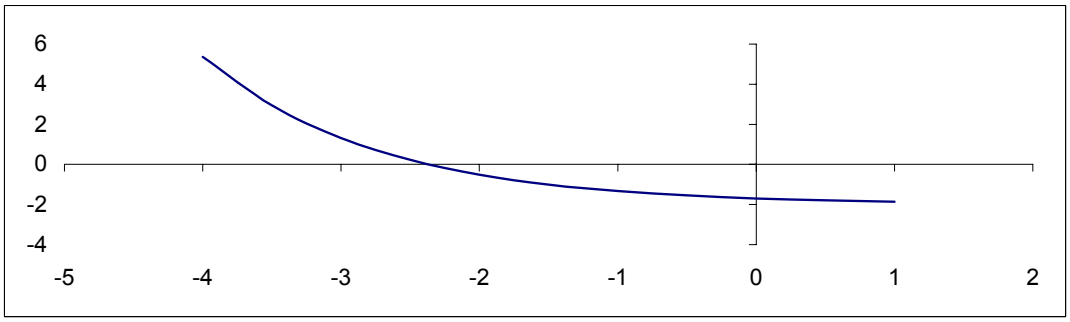
Задание 2. Решить методом деления пополам (метод бисекций) уравнение F(x) = 0. В решении отыскать наименьший положительный или отрицательный корень.

Дано: $F(x) = A \exp(-B x) - C$

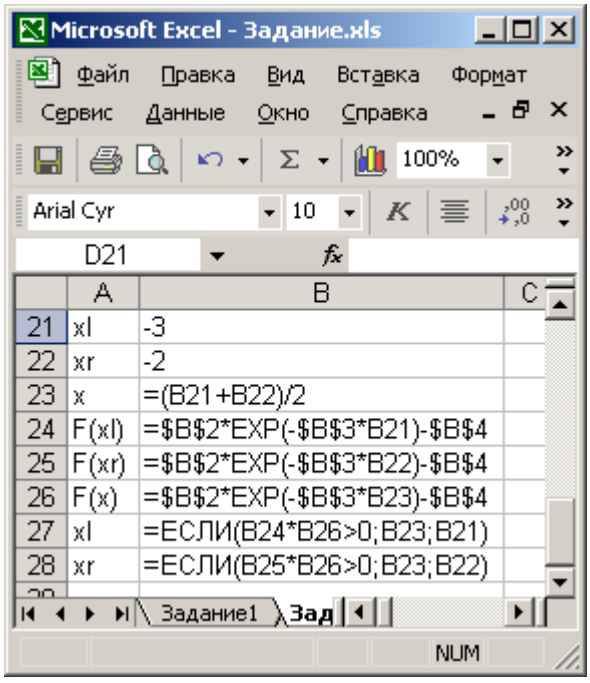
$A = 0{,}3;\ B = 0{,}8;\ C = 2$

Решение. Все операции проводятся в Excel. Для начала нужно определить интервал, в котором находится корень уравнения. Это можно сделать, построив график функции:

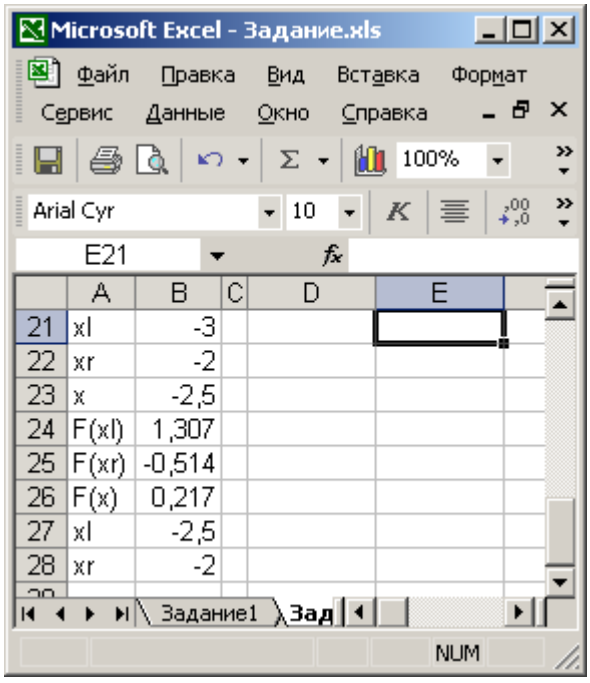
x	F(x)
-4,0	5,360
-3,5	2,933
-3,0	1,307
-2,5	0,217
-2,0	-0,514
-1,5	-1,004
-1,0	-1,332
-0,5	-1,552
0,0	-1,700
0,5	-1,799
1,0	-1,865



Как видно, наименьший корень находится в интервале [-3; -2]. Для его поиска реализуем метод деления пополам. Ниже приведен вид формул на листе.



Лист с формулами



Лист с исходными данными

Задание 3. В трубу АВ под углом α к горизонтальной оси, заполненную жидкой средой, влетает груз Д, который имеет начальную массу m и начальную скорость V_0. На груз действуют следующие силы: сила тяжести G, сила вязкого сопротивления среды R, пропорциональная скорости груза, и сонаправленной с направлением движения сила Q.

Дано: $\alpha = 60°$, m = 3 кг, $Q_1 = 18$ Н, $Q_2 = 8$ Н, $\Delta Q = 2$ Н, k = 0,3

$V_{10} = 20$ м/с

Решение. Движение груза Д происходит под действием следующих силы: силы тяжести G, силы сопротивлению движения R и сонаправленной с направлением движения силы Q. Движение тела описывается уравнением

$$m\frac{dV}{dt} = F$$

где F – равнодействующая сила, определяемая по уравнению

$$F = G\sin\alpha + Q - R = mg\sin\alpha + Q - kV$$

Подставляя, получим

$$m\frac{dV}{dt} = mg\sin\alpha + Q - kV$$

После упрощения

$$\frac{dV}{dt} + \frac{kV}{m} = q\sin\alpha + \frac{Q}{m}$$

Аналитическое решение данного уравнения складывается из общего решения уравнения

$$\frac{dV}{dt} + \frac{kV}{m} = 0$$

И частного решения в виде

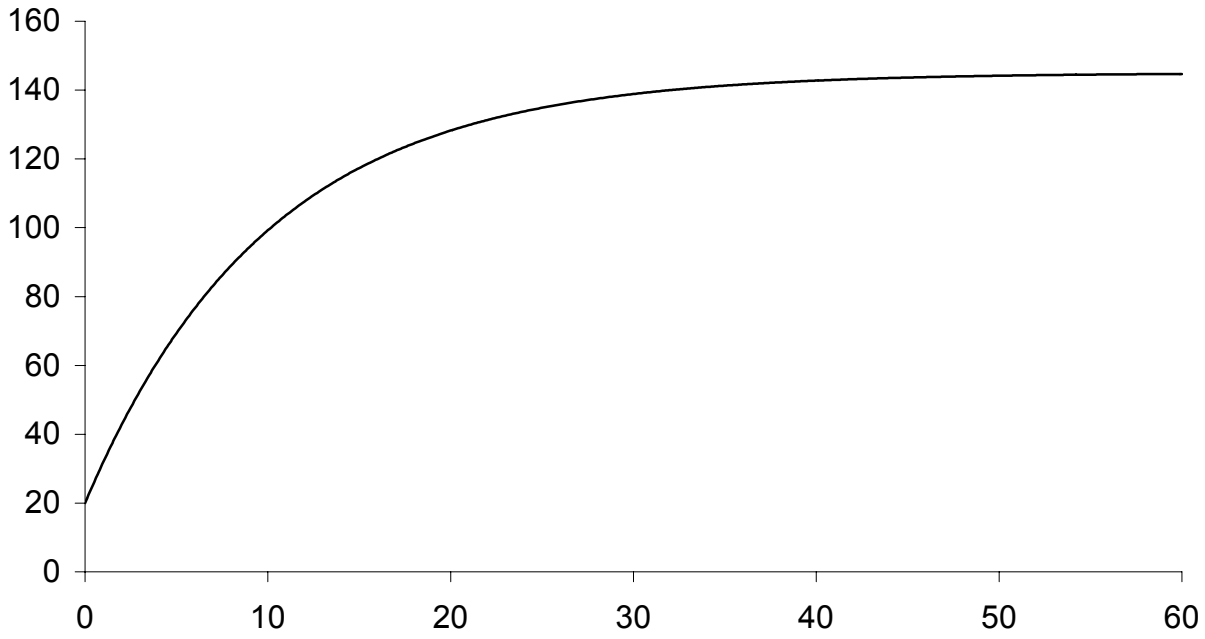
$$V(t) = At + B$$

Общее решение

$$V(t) = C\exp\left(\frac{-kt}{m}\right)$$

Частное решение

Графическая зависимость скорости от времени (диаграмма Excel)



Выполним вычислительный эксперимент в MathCAD.

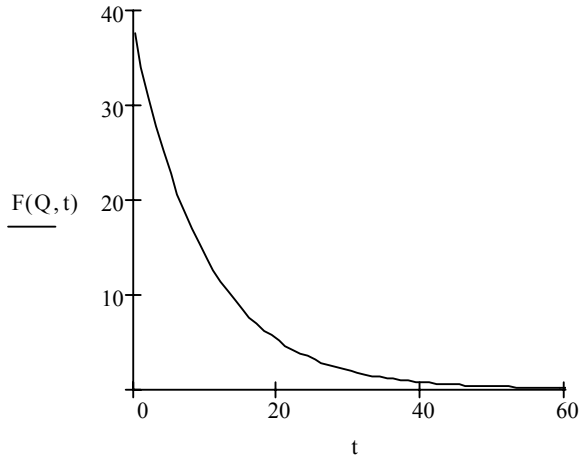
Исходные данные

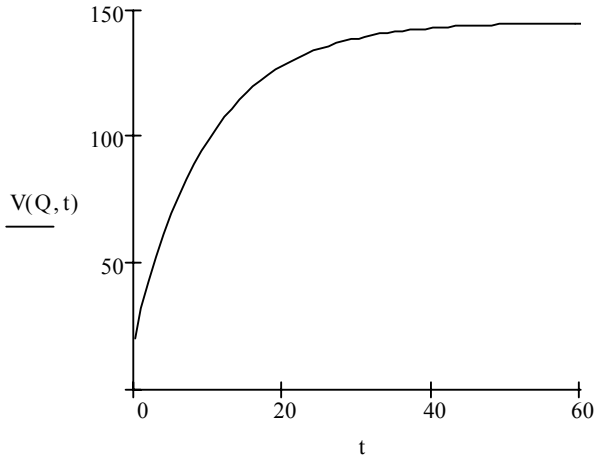
$m := 3 \qquad k := 0.3 \qquad \alpha := \frac{\pi}{3} \qquad g := 9.81 \qquad Q := 18 \qquad V_0 := 20$

$$V(Q,t) := \left(V_0 - \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + Q}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{-k \cdot t}{m}\right) + \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + Q}{k}$$

$$F(Q,t) := m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + Q - k \cdot V(Q,t)$$

$t := 0, 1 .. 60$

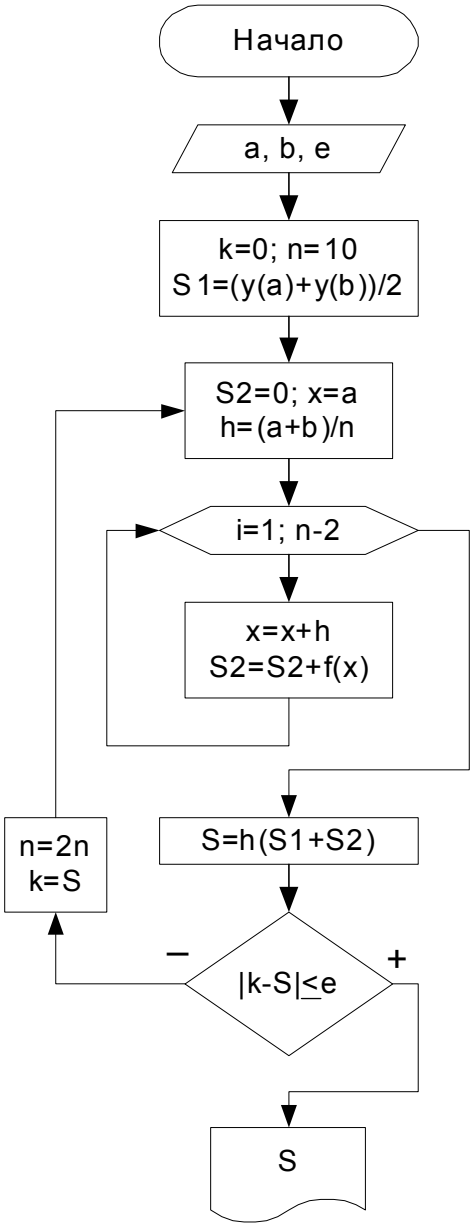




Задание 4. Построить алгоритм вычисления интеграла методом трапеций с заданной точностью. Найти его значения в Excel и MathCAD. Сравнить результаты.

Дано: $\int_{1}^{3} \frac{dx}{1+x}$

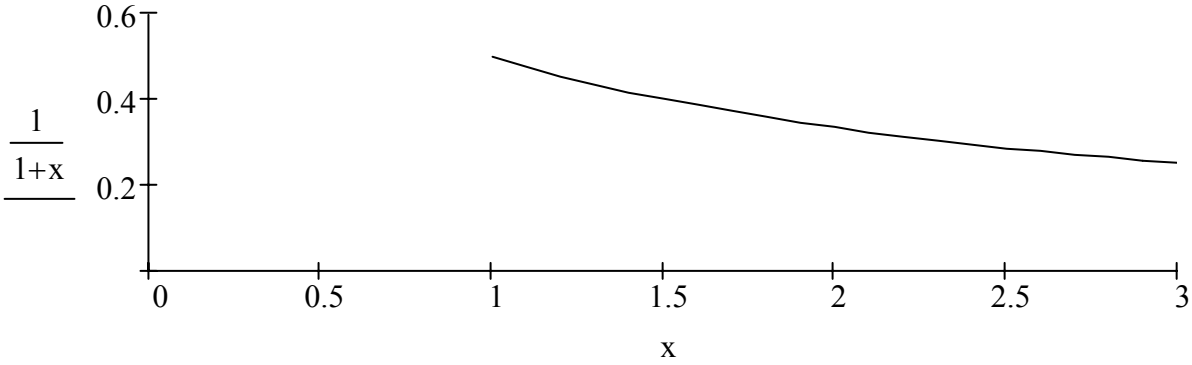
Решение. Построим алгоритм вычисления интеграла методом трапеций с заданной точностью, с последовательным удвоением числа участков и сравнением интегралов.



Недостатком этого метода является его неточность. С уменьшением шага интегрирования возрастает точность расчетов. Решение интеграла в MathCAD

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{1+x}\,dx = 0.693$$

$x := 1, 1.1 .. 3$



Лист со значениями

Microsoft Excel - Задание.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	e^x	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$		
2	0,50	1,64870	1,66E-02	1,00E-04	-1,00E-04	-1,00E-04		
3	0,51	1,66530	1,67E-02	2,00E-04	4,44E-16	8,88E-16		
4	0,52	1,68200	1,69E-02	2,00E-04	-4,44E-16	-1,00E-04		
5	0,53	1,69890	1,71E-02	2,00E-04	1,00E-04	2,00E-04		
6	0,54	1,71600	1,73E-02	1,00E-04	-1,00E-04	-2,00E-04		
7	0,55	1,73330	1,74E-02	2,00E-04	1,00E-04	3,00E-04		
8	0,56	1,75070	1,76E-02	1,00E-04	-2,00E-04	-4,00E-04		
9	0,57	1,76830	1,77E-02	3,00E-04	2,00E-04			
10	0,58	1,78600	1,80E-02	1,00E-04				
11	0,59	1,80400	1,81E-02					
12	0,60	1,82210						
13								
14	x	0,563						
15	q	0,3						
16								
17		q	q-1	q-2	q-3			
18	1	3,00E-01				5,28E-03		
19	2	3,00E-01	-7,00E-01			-1,05E-05		
20	3	3,00E-01	-7,00E-01	-1,70E+00		-1,19E-05		
21	4	3,00E-01	-7,00E-01	-1,70E+00	-2,70E+00	1,61E-05		
22						5,27E-03		
23								
24	y0	1,7507E+00						
25	y	1,7560E+00						
26								
27								

Здание 6. Найти значение вязкости масла для заданной температуры, используя инструменты интерполирования и аппроксимации в MathCAD. Сравнить результаты и сделать выводы.

Масло М14В$_2$, температура 44° С.

Задание опытных данных

$vx := (16.5\ \ 19.4\ \ 25.8\ \ 31.9\ \ 32.4\ \ 39.6\ \ 47.0\ \ 55.7)^T$

$vy := (701.87\ \ 556.16\ \ 350.24\ \ 231.58\ \ 225.12\ \ 147.65\ \ 99.56\ \ 64.2)^T$

Построение вектора коэффициентов для сплайновой интерполяции с линейными концами сплайнов

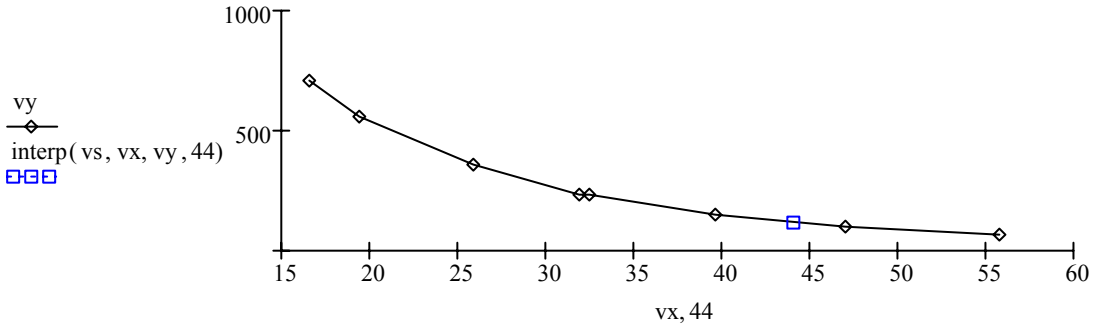
$vs := \mathrm{lspline}(vx, vy)$

Задание интерполяционной функции

$f(x) := \mathrm{interp}(vs, vx, vy, x)$

Вычисление значения функции по кубической интерполяции

$f(27) = 322.145$

Линейная интерполяция

$\mathrm{linterp}(vx, vy, 44) = 119.056$